2M

УДК 514.116

Л.П. Мироненко
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83000, г. Донецк, ул. Артема, 58, *mironenko.leon@yandex.ru*

Иерархия признаков сравнения в теории числовых рядов

L.P. Mironenko
Donetsk National Technical University, Ukraine
Ukraine, 83000, Donetsk, Artema st., 58

A Rearrangement of the Comparison Tests in the Theory of Number Series

Л.П. Мироненко
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83000, м. Донецьк, вул. Артема, 58

Ієрархія ознаків порівняння у теорії числових рядів

В работе предложена теорема, устанавливающая связь между рядом геометрической прогрессии и обобщенно гармоническим и логарифмическими рядами. Теорема устанавливает иерархию перечисленных рядов по скорости сходимости. Теорема и следствия из нее носят в большей мере теоретический характер, но может быть использована практически для оценки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами. Теорема легко переносится на случай несобственных интегралов.
Ключевые слова: ряд, сходимость, гармонический ряд, признаки сравнения, предел, интегральный признак.

In the paper a theorem that connects the geometrical series with the zeta-function and the logarithmic series is proposed. The theorem rearranges the standard series according to a speed of the convergence of the series. The theorem has mainly a theoretical character but it can be used for an estimation of a convergence of series with non-negative terms. The theorem is adopted to improper integrals.
Keywords: series, convergence, zeta-function, logarithmic series, comparison tests, integral test.

В роботі запропоновано теорема, яка встановлює зв'язок між рядом геометричної прогресії та гармонічним і логарифмічними рядами. Теорема встановлює ієрархію перелічених рядів згідно швидкості збіжності. Теорема та її наслідки мають у більшої мірі теоретичну цінність, але вона може бути корисна у практичному застосуванні для оцінки збіжності числових рядів з позитивними членами. Теорема легко перетворюється на випадок невластивих інтегралів.
Ключові слова: ряд, збіжність, гармонічний ряд, ознака порівняння, інтегральна ознака.

Введение

Признак сравнения рядов с положительными членами в теории числовых рядов обычно используется в двух формах – в конечной и предельной. В первом случае сравниваются члены двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \ge 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n,\ v_n \ge 0$. Если существует число $M > 0$, такое, что начиная с некоторого номера N (т.е. при $n \ge N$) выполняется неравенство $u_n \le M \cdot v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ [1].

В предельном признаке сравнения рассматривается предел $\lim_{n\to\infty} u_n / v_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. $v_n > 0$ сходится, а величина предела равна $C < \infty$ (включая нуль), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, а величина предела равна C (включая бесконечность), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также расходится [1], [2].

В качестве ряда сравнения обычно выбирается один из рядов:

– ряд геометрической прогрессии с общим членом $v_n = 1/q^n$,

– обобщенно гармонический ряд $v_n = 1/n^{\alpha}$. Гармонический ряд с общим членом $v_n = 1/n$ является частным случаем обобщенно гармонического ряда при $\alpha = 1$.

– обобщенно логарифмический ряд порядка p с общим членом $v_n = 1/n \ln n_1 \ln n_2 \ldots$ $\ldots \ln n_{p-1} \ln^{\alpha} n_p$, где $\ln n_p = \underbrace{\ln \ln \ldots \ln}_{p} n$. Более понятным является частный случай логарифмического ряда $v_n = 1/n \ln^{\alpha} n$, который следует из общего случая при $p = 1$, а ряд $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n \ln n$ играет роль гармонического ряда.

Перечисленные ряды сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \le 1$. Эти ряды являются эталонными в теории числовых рядов с неотрицательными членами и расположены в соответствии со скоростью сходимости. Первый ряд в списке является самым «грубым» и предназначен для сравнения с быстро сходящимися рядами. Последний ряд в списке является самым медленно сходящимся рядом при $\alpha > 1$. Поэтому этот ряд, как эталонный, применяется к рядам, сходимость которых невозможно установить с помощью геометрического или обобщенно гармонического ряда [1].

В работе устанавливается связь между эталонными рядами сравнения с помощью теоремы, рассмотренной в следующем пункте.

1 Теорема для геометрического ряда

В работе [2] сформулирована следующая теорема. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}$. Доказательство теоремы основано на оценке частичной суммы $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ и монотонном убывании членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Положим $t_k = u_1 + 2u_2 + \ldots + 2^k u_{2^k}$. При $n \le 2^k$

$$s_n \le u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6 + u_7) + \ldots + (u_{2^k} + \ldots + u_{2^{k+1}-1}) \le$$
$$\le u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots + 2^k u_{2^k} = t_k.$$

С другой стороны, при $n \ge 2^k$

$$s_n \ge u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) + \ldots + (u_{2^{k-1}+1} + \ldots + u_{2^k}) \ge$$
$$\ge \frac{1}{2} u_1 + 2u_2 + 2u_4 + 4u_8 + \ldots + 2^{k-1} u_{2^k} = t_k / 2.$$

Последовательности $\{s_n\}$ и $\{t_n\}$ либо обе ограничены, либо обе неограниченны, что доказывает как необходимость, так и достаточность теоремы.

Теорема может быть легко обобщена с функции 2^k на функцию q^k, $q>1$ и, в частности, для $q=e$.

Теорема. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, положительные члены u_n которого монотонно убывают (начиная с некоторого номера N) сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k u_{q^k}, \; q>1. \qquad (1)$$

Доказательство. По интегральному признаку Коши сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ эквивалентна сходимости несобственного интеграла $\int^{\infty} u_n dn$. В интеграле сделаем замену $n=q^k, q>1$: $\int_0^{\infty} u_n dn = \int_0^{\infty} u_{q^k} dq^k = \ln q \int_0^{\infty} q^k u_{q^k} dk$. Опять же по интегральному признаку интеграл $\int_0^{\infty} q^k u_{q^k} dk$ эквивалентен ряду (1).

Поскольку рассуждения можно обратить, то это доказывает необходимость и достаточность данной теоремы.

Применим теорему к эталонным рядам сравнения. Докажем, что обобщенно гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \le 1 - \text{расходится} \end{cases}.$$

Применим формулу (1) к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \frac{1}{q^{\alpha k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{(\alpha-1)k}}$. Это геометрический ряд, который сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Докажем, что обобщенно логарифмический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n} = \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \le 1 - \text{расходится} \end{cases}.$$

Применим формулу (1) к ряду $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n \ln^{\alpha} n$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \frac{1}{q^k \ln^{\alpha} q^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\alpha} q^k} = \frac{1}{\ln^{\alpha} q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

Последний ряд является обобщенно гармоническим, сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Подчеркнем особенность полученных результатов. Она состоит в том, что применение теоремы к обобщенно гармоническому ряду сводит задачу сходимости к исследованию сходимости ряда геометрической прогрессии, а применение теоремы к логарифмическому ряду сводит задачу сходимости к исследованию сходимости обобщенно гармонического ряда.

Докажем, что обобщенно логарифмический ряд второго порядка

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot (\ln \ln n)^{\alpha}} = \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \le 1 - \text{расходится} \end{cases}.$$

Применим формулу (1) к ряду $\sum_{n=3}^{\infty} 1/n\ln n\cdot(\ln\ln n)^{\alpha}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \frac{1}{q^k \ln q^k \cdot \left(\ln\ln q^k\right)^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln q\cdot\left(\ln(k\ln q)\right)^{\alpha}} = \frac{1}{\ln q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot\left(\ln k+\ln\ln q\right)^{\alpha}}$$

$$\underset{k>>1}{\approx}\frac{1}{\ln q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot\ln^{\alpha}k}.$$

Подчеркнем ту же самую особенность, что и у предыдущего ряда. В результате применения теоремы получен обобщенно логарифмический ряд первого порядка, т.е. ряд, который по сходимости идет предыдущим в иерархии рядов сравнения.

Таким же образом докажем сходимость обобщенно логарифмического ряда произвольного порядка p

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n_1\ln n_2\ldots\ln n_{p-1}\ln^{\alpha} n_p} = \begin{cases}\alpha>1-\textit{сходится}\\ \alpha\le 1-\textit{расходится}\end{cases}$$

где $\ln n_p = \underbrace{\ln\ln\ldots.\ln}_{p} n$.

2 Теорема для геометрического ряда в случае несобственных интегралов

Для несобственных интегралов имеет место подобная рассмотренной теореме для рядов.

Теорема. Для того чтобы несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ с неотрицательной и монотонно убывающей функцией $f(x)$ при $x\ge 1$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_0^{+\infty} q^y f(q^x)dx,\ q>1. \qquad (2)$$

Доказательство очевидно, если сделать замену $x=q^y, q>1$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} f(q^y)dq^y = \ln q\int_0^{\infty} q^y f(q^y)dy.$$

Поскольку рассуждения можно обратить, то есть, сделать обратную замену, то это доказывает необходимость и достаточность теоремы.

Если формулу (2) последовательно применить к функции $f(x)=1/x^{\alpha}$, затем, к функциям $f(x)=1/x\ln^{\alpha}x$, $1/x\ln x(\ln\ln x)^{\alpha}$ и т.д., то получим аналогичные, как в случае рядов, результаты

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ эквивалентен $\int_1^{\infty}\frac{dy}{q^{(\alpha-1)y}}$

$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha}x}$ эквивалентен $\int_1^{\infty}\frac{dy}{y^{\alpha}}$

$\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\ln x\ln^{\alpha}x}$, эквивалентен $\int_3^{\infty}\frac{dy}{y\ln^{\alpha}y}$

и т.д.

Выводы

В работе предложена теорема, которая на базе ряда геометрической прогрессии последовательно устанавливает сходимость и расходимость следующих эталонных рядов сравнения: обобщенно гармонического и обобщенно логарифмических рядов различного порядка. Теорема однозначно устанавливает иерархию по скорости сходимости эталонных рядов сравнения, принятых в официальной теории числовых рядов.

Помимо решения главной задачи, предложено обобщение теоремы и оригинальный способ доказательства.

Кроме того, результаты работы легко переносятся на несобственные интегралы, для которых также используется признак сравнения.

Литература

1. Евграфов М.А. Ряды и интегральные представления / М.А. Евграфов // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1986. – Т. 13.– 260 С.
2. Cinlar E.Mathematical Methods of Engineering Analysis / E. Cinlar, R.J. Vanderbei. – 2000. – 119 p.

Literature

1. Evgrafov M.A. Rjady i integral’nye predstavlenija. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravlenija. T. 13. 1986. 260 s.
2. Cinlar E. Vanderbei R.J. Mathematical Methods of Engineering Analysis. 2000. 119 p.

RESUME

L.P. Mironenko

A Rearrangement of the Comparison Tests in the Theory of Number Series

In the paper a theorem that connects the geometrical series with the zeta-function and the logarithmic series is proposed. The theorem rearranges the series according to a speed of its convergence. The theorem has mainly a theoretical character but it can be used for an estimation of a convergence of the series with non-negative terms. The theorem is adopted to improper integrals.

Theorem. The series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ with positive monotonically decreasing terms converges if and only if the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k u_{q^k}, \ q > 1. \tag{1}$$

converges.

Proof. According to the integral (Cauchy) test the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converges if and only if the improper integral $\int^{\infty} u_n dn$ converges. In the integral we will change the variable $n = q^k, q > 1$: $\int_0^{\infty} u_n dn = \int_0^{\infty} u_{q^k} dq^k = \ln q \int_0^{\infty} q^k u_{q^k} dk$. Again, according to the integral test the integral $\int_0^{\infty} q^k u_{q^k} dk$ is equivalent to the series (1).

We will apply the theorem to the zeta-function $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$; $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \frac{1}{q^{\alpha k}} =$ $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{(\alpha-1)k}}$. Thus the problem is reduced to the convergence of the geometrical series.

Now we will apply the theorem to the logarithmic series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n \cdot \ln^{\alpha} n$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \frac{1}{q^k \ln^{\alpha} q^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\alpha} q^k} = \frac{1}{\ln^{\alpha} q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

Thus the problem is reduced to the evaluation of a convergence of the zeta-function.

In the case of the series $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n \cdot (\ln\ln n)^{\alpha}$ we have the same result as for the previous two series

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \frac{1}{q^k \ln q^k \cdot (\ln\ln q^k)^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln q \cdot (\ln(k \ln q))^{\alpha}} = \frac{1}{\ln q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (\ln k + \ln\ln q)^{\alpha}}$$

$$\underset{k>>1}{\approx} \frac{1}{\ln q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln^{\alpha} k}.$$

The problem is reduced to the evaluation of a convergence of the first order logarithmic series. The method can be continued for to the logarithmic series of any order

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n_1 \ln n_2 ... \ln n_{p-1} \ln^{\alpha} n_p}, \quad \ln n_p = \underbrace{\ln\ln ....\ln}_{p} n.$$

The theorem rearranges the comparison series according to their speed of a convergence.

In the work it is proposed a method which rearranges the comparison series according to the speed of their convergence.

Статья поступила в редакцию 07.11.2012.